

Кизилова Н.Н., Штейн А.А., Юдина Е.Н.
Харьковский национальный университет (Украина),
Институт механики МГУ

Континуальные модели, используемые для математического описания роста биологических тканей по большей части однофазные. По существу это модели вязкоупругих сред, в которых подразумевается присутствие объемного притока массы, вычисляемого с использованием уравнения неразрывности. В последнее время стали появляться различные многофазные модели, однако получаемые в них соотношения и закономерности, к сожалению, не допускают ясной биологической трактовки и не проясняют роли механических факторов в тех закономерностях биологического роста, которые наблюдаются в природе или экспериментальных условиях.

Физически приток массы означает наличие распределенной доставки материала, обеспечиваемой перемещающимися на микроскопическом уровне жидкостями. Анализ проблем, связанных с взаимодействием транспортных и ростовых процессов, требует введения жидких фаз явно. Например, транспортно-ростовые процессы в растительной ткани адекватно описываются как минимум трехфазной средой, состоящей из твердой фазы (клеточные стенки) и двух жидких (внутриклеточной и внеклеточной), причем кинематические характеристики, определяющие ростовую деформацию ткани, связываются с твердой фазой. Таким образом, лишь одна фаза оказывается собственно растущей.

Вместе с тем, при росте часто возникает ситуация, когда различные ткани растут по своим собственным законам, но вынуждены координировать свои перемещения и деформации с соседними тканями. В частности, при макроскопическом описании соседствующие ткани могут занимать один и тот же пространственный объем. Примером является система проводящих трубок (жилок) в листе растения, распределенная при достаточно грубом осреднении в том же пространстве, что и внутренняя ткань (паренхима). Другой пример – две перемешанные популяции разных клеток (например, нормальных и злокачественных), сосуществующих в составе одной ткани.

В такого рода средах (дифференциально растущих), в отличие от однофазных сред или сред состоящих из единственной «растущей» фазы и заполняющих ее жидкостей, существенны задачи, связанные с взаимным перемещением фаз и возникающими в процессе такого перемещения межфазными силами.

Для дифференциально растущих сред приходится рассматривать несколько растущих континуумов со своими законами движения и деформационными характеристиками и с обязательным учетом распределенных сил межфазного взаимодействия. Для среды, составленной несколькими твердыми континуумами, каждый из них рассматривается как вязкоупругий материал, и межфазная сила также вязкоупругая. В других случаях структура модели может быть иной: например, достаточно разреженную клеточную популяцию естественно представить как среду частиц в очень вязкой жидкости, образованной клетками многочисленной популяции.

Континуумы, составляющие дифференциально растущую среду, могут расти синхронно, то есть с совпадающими законами движения и, следовательно, нулевой относительной скоростью, или асинхронно, проскальзывая один относительно другого. Возможна ситуация, когда граничные условия допускают синхронный рост, а он, тем не менее, оказывается неустойчивым. При таком типе неустойчивости происходит расхождение частиц составляющих континуумов, например, клетки одной из популяций постепенно окружают другую. Приведены примеры решения модельных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09–01–90403-Укр_ф_а) и ДФФД Украины (проект № Ф28.1/011).